第 15 講　三角関数

1 ［1］ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に対して $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$ のとき，次の値を求めよ.

(1) $\sin\alpha\cos\alpha$　　(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

(3) $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}$　　(4) $\sin\alpha$

［2］ $8\cos^2\theta-2\sin\theta-5=0$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を満たす θ を求めよ.

【Point Pickup】

三角関数の相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　「　　　　　　　　」

$\sin\theta+\cos\theta=a$ $(\sin\theta-\cos\theta=a)$ の形

→「　　　」をすることで「　　　　　　」の値を出す.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1] (1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$ を解け.

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，不等式 $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\cos x > \dfrac{3}{2}$ を解け.

[2] $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $3\sin\theta - 1 < \cos 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

【Point Pickup】

加法定理（複号同順）

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \quad \cos\alpha\sin\beta$　　　$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \quad \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \quad \tan\beta}{1 \quad \tan\alpha\tan\beta}$

倍角の公式

$\sin 2\theta =$　　　　　　　　$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta =$　　　　　　$=$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ．

[2]　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$ の最小値と，それをとる θ の値を求めよ．

【Point Pickup】

三角関数の最大，最小

→「　　　　」が基本．また，置き換えによる「　　関数」は頻出．

半角の公式

→ 倍角の公式から導く．

$\sin^2\theta=$　　　　　　，$\cos^2\theta=$　　　　　　，$\sin\theta\cos\theta=$

合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$

$r=$　　　　　，$\cos\alpha=\dfrac{\quad}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{\quad}{r}$

合成後は，角度の「　　　」に注意．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　三角関数

[1]　$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin x\cos x=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，

$\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である．

[2]　不等式 $\cos 2\theta+\cos\theta\leqq 0$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解は $\dfrac{\pi}{\boxed{カ}}\leqq\theta\leqq\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{カ}}\pi$ である．

[3]　関数 $y=2\cos\theta-\sin^2\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値は $\boxed{ク}$，最小値は $-\boxed{ケ}$ である．

[4]　関数 $y=2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x-2\sin^2 x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ は，$x=\dfrac{\pi}{\boxed{コサ}}$ のとき最大値をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　三角関数

1 [1]　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に対して $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　$\sin\alpha\cos\alpha$　　(2)　$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

(3)　$\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}$　　(4)　$\sin\alpha$

(1)　$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$ より　$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{16}{9}$

$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{16}{9}$　　よって　$\sin\alpha\cos\alpha=\boldsymbol{\dfrac{7}{18}}$

(2)　$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)=\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{7}{18}\right)=\boldsymbol{\dfrac{22}{27}}$

(3)　$\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\frac{7}{18}}=\boldsymbol{\dfrac{18}{7}}$

(4)　$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\dfrac{7}{9}=\dfrac{2}{9}$　　よって　$\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

これと $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$ を辺々加えて　$2\sin\alpha=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{3}$　　よって　$\sin\alpha=\boldsymbol{\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{6}}$

1 [2]　$8\cos^2\theta-2\sin\theta-5=0$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を満たす θ を求めよ．

$8\cos^2\theta-2\sin\theta-5=0$

$8(1-\sin^2\theta)-2\sin\theta-5=0$

$8\sin^2\theta+2\sin\theta-3=0$

$(4\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)=0$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $0\leqq\sin\theta\leqq1$　よって　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1] (1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$ を解け.

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，不等式 $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\cos x > \dfrac{3}{2}$ を解け.

(1) $\sin 2\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$　より　$2\sin\theta\cos\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$

$\cos\theta(2\sin\theta - \sqrt{2}) = 0$

$\cos\theta = 0$　または　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$

(2) $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\cos x > \dfrac{3}{2}$　より　$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\cos x - \dfrac{3}{2} > 0$

$4\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\cos x - 3 > 0$

$(2\sin x - \sqrt{3})(2\cos x + \sqrt{3}) > 0$

よって　$\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $\cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　または　$\sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $\cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi < x \leqq \pi}$

2 [2] $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $3\sin\theta - 1 < \cos 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

$3\sin\theta - 1 < \cos 2\theta$　より　$3\sin\theta - 1 < 1 - 2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 < 0$　　$(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) < 0$

常に $\sin\theta + 2 > 0$ より　$2\sin\theta - 1 < 0$　　$\sin\theta < \dfrac{1}{2}$　　よって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ．

$y=\sin^2\theta-\cos\theta=1-\cos^2\theta-\cos\theta$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$

このとき　$y=-t^2-t+1=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

よって　$t=-\dfrac{1}{2}$　つまり　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　**最大値 $\dfrac{5}{4}$**

$t=1$　つまり　$\cos\theta=1$ より　$\theta=0$ のとき　**最小値 -1**　をとる．

3 ［2］　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$ の最小値と，それをとる θ の値を求めよ．

$\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$

$=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}+2\sqrt{3}\times\dfrac{\sin2\theta}{2}-\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

$=\sqrt{3}\sin2\theta+\cos2\theta=2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13}{6}\pi$

$-1 \leqq \sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$　　　$-2 \leqq 2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 2$

よって，$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$　つまり　**$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$　のとき　最小値 -2**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　三角関数

[1]　$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin x\cos x=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，

$\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である．

[2]　不等式 $\cos 2\theta+\cos\theta\leqq 0$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解は $\dfrac{\pi}{\boxed{カ}}\leqq\theta\leqq\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{カ}}\pi$ である．

[3]　関数 $y=2\cos\theta-\sin^2\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値は $\boxed{ク}$，最小値は $-\boxed{ケ}$ である．

[4]　関数 $y=2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x-2\sin^2 x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ は，$x=\dfrac{\pi}{\boxed{コサ}}$ のとき最大値をとる．

解答例

[1]　$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より　$(\sin x+\cos x)^2=\dfrac{1}{2}$　　$1+2\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}$

よって　$\sin x\cos x=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}=\dfrac{\mathbf{5\sqrt{2}}}{\mathbf{8}}$

[2]　$\cos 2\theta+\cos\theta\leqq 0$ より　$2\cos^2\theta-1+\cos\theta\leqq 0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\leqq 0$　　$-1\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$　　よって　$\dfrac{\pi}{\mathbf{3}}\leqq\theta\leqq\dfrac{\mathbf{5}}{3}\pi$

[3]　$y=2\cos\theta-\sin^2\theta=2\cos\theta-(1-\cos^2\theta)=\cos^2\theta+2\cos\theta-1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より　$-1\leqq t\leqq 1$

このとき　$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$　より

$t=1$　つまり　$\cos\theta=1$ より　$\theta=0$ のとき　最大値 **2**

$t=-1$　つまり　$\cos\theta=-1$ より　$\theta=\pi$ のとき　最小値 $\mathbf{-2}$

[4]　$y=2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x-2\sin^2 x$

$=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sin 2x}{2}+4\times\dfrac{1+\cos 2x}{2}-2\times\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$=\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x+1=2\sqrt{3}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$

$0\leqq x\leqq\pi$ より　$0\leqq 2x\leqq 2\pi$　$\dfrac{\pi}{3}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{7}{3}\pi$

よって　$2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$x=\dfrac{\pi}{\mathbf{12}}$ のとき y は最大値をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。